V олимпиада им. академика А.Г. Шипунова

Тульская область, 4 октября 2020 г.

Решения задач, 11 класс.

М1. Решите неравенство: $\sqrt{\frac{20-|x|}{x-3}} \geq x$.

Решение. Найдём ОДЗ: $\frac{20-|x|}{x-3} \geq 0 \leftrightarrow \frac{(20-|x|)(20+|x|)}{x-3} \geq 0 \leftrightarrow \frac{(20-x)(20+x)}{x-3} \geq 0$. Согласно методу интервалов, $x \in (-\infty; -20] \cup (3; 20]$.

Если $x \in (-\infty; -20]$, то $x < 0$, а $\sqrt{\frac{20-|x|}{x-3}} \geq 0$, и неравенство верно всегда.

Если $x \in (3; 20]$, то $x > 0$, и в связи с этим возможно возвести неравенство в квадрат.

$\frac{20-|x|}{x-3} = \frac{20-x}{x-3} \geq x^2 \leftrightarrow \frac{20-x-x^2(x-3)}{x-3} \geq 0 \leftrightarrow \frac{x^3-3x^2+x-20}{x-3} \leq 0$.

Выражение $x^3 - 3x^2 + x - 20$ имеет ноль $x = 4$ и, по теореме Безу, должно делиться $x - 4$: $x^3 - 3x^2 + x - 20 = (x-4)(x^2 + x + 5)$. Отметим, что второй множитель всегда положителен, поэтому $\frac{x^3-3x^2+x-20}{x-3} \leq 0 \leftrightarrow \frac{x-4}{x-3} \leq 0 \leftrightarrow x \in (3; 4]$.

Ответ: $x \in (-\infty; -20] \cup (3; 4]$.

М2. В треугольнике ABC углы при основании AB – острые, CH – высота треугольника ABC. Пусть M и N – соответственно середины сторон AC и BC. Известно, что площади треугольников AMH и BNH равны, соответственно S_1 и S_2, а радиусы вписанных в них окружностей равны, соответственно r_1 и r_2. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

Решение. Т.к. треугольники *ACH* и *BCH* прямоугольные, по свойству медианы, опирающейся на гипотенузу верны соотношения: *AM=MC=MH; BN=NC=NH*.

Пусть $p = (AB + BC + CA)/2$ – полупериметр треугольника ABC. Тогда $p = \frac{AB+BC+CA}{2} = \frac{(AH+HB)+2\times AM+2\times BN}{2} = \frac{AH+AM+MH}{2} + \frac{HB+BN+NH}{2} = p_1 + p_2 = \frac{S_1}{r_1} + \frac{S_2}{r_2}$, где p_1 и p_2 – полупериметры треугольников AMH и BNH, вычисленные по формуле $S = pr$ через площади и радиусы вписанных окружностей этих треугольников.

Отметим, что $\mathrm{S}_{\Delta ACH} = 2S_1$, т.к. треугольники ABH и AMH имеют одну высоту и основания, отличные в два раза. Аналогично, $\mathrm{S}_{\Delta BCH} = 2S_2$. Тогда искомый радиус r выразим как $\frac{\mathrm{S}}{p} = \frac{2(S_1+S_2)}{\frac{S_1}{r_1}+\frac{S_2}{r_2}}$

Ответ: $\frac{2(S_1+S_2)}{\frac{S_1}{r_1}+\frac{S_2}{r_2}}$.

М3. На доске написаны числа 1, 2, 3, …, 36. Петя берет два произвольных числа, записанных на доске, a и b, стирает их и записывает на доску число $ab + a + b$.

Затем Петя повторяет эту операцию, пока на доске не останется всего одно число. Может ли это число делиться на 37?

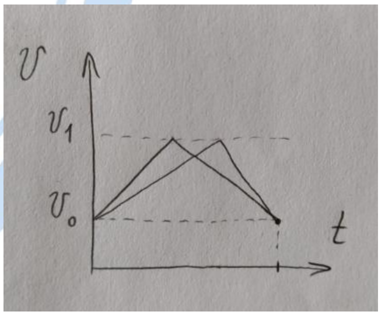
Решение. Пусть исходные числа и числа, которые появляются вместо исходных по формуле $ab + a + b$, были записаны на доску белым мелом. Запишем под каждым «белым» числом красным мелом число, увеличенное на единицу. Будем каждый раз, стирая белое число, стирать и соответствующее ему «красное», а записывая новое «белое» - записывать «красное», равное увеличенному на единицу записанному «белому».

Если из «белых» чисел a и b мы получили «белое» число $ab + a + b$, то из соответствующих «красных» чисел, $a + 1$ и $b + 1$ мы получаем «красное» число $ab + a + b + 1 = (a + 1)(b + 1)$. Таким образом, для «красных» чисел вместо стертых двух всегда записывается произведение, следовательно, как бы не действовал Петя, последнее выписанное «красное» число равняется произведению всех исходных «красных» чисел, $2 \times 3 \times ... \times 37 = 37!$, а полученное «белое» – на единицу меньше, $37! - 1$. Очевидно, на 37 это число не делится.

Ответ: не может.

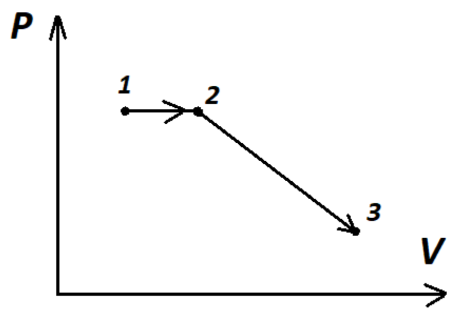
Ф1. *«Выигрышная стратегия».* Два автомобиля стартуют с одинаковой начальной скоростью V_0 и двигаются вдоль одной прямой. Первый автомобиль разгоняется с ускорением a_1 и через некоторое время достигает максимальной скорости V_1. После этого он замедляется с ускорением a_3, достигая скорости V_0. Второй автомобиль разгоняется с ускорением a_2 ($a_2 < a_1$), достигает той же максимальной скорости V_1, и тоже замедляется (с ускорением a_4) до скорости V_0. Оказалось, что автомобили достигли скорости V_0 одновременно. Какой из автомобилей прошел большее расстояние к этому моменту?

Решение. Построим график зависимости скорости автомобилей от времени. Путь, пройденный ими равен площади под графиком. Заметим, что площадь нижнего прямоугольник одинаковая для обоих, а верхние треугольники имеют одинаковые высоты и основания, т.е. тоже имеют равные площади. Делаем вывод: пути, пройденные автомобилями одинаковые, независимо от ускорений.



Ответ: расстояния одинаковые.

Ф2. *«Работа не волк, работа – work».* Моль идеального одноатомного газа из начального состояния 1 расширяется сначала изобарически, а затем в процессе с линейной зависимостью давления от объема (см. рисунок). Известно, что $V_3/V_2 = V_2/V_1$, $T_2 = T_3$. Найти отношение V_2/V_1, если количество теплоты,



подведенное к газу на участке $1-2$, в два раза больше величины работы, совершенной газом на участке $2-3$.

Решение: Пусть $\alpha = \frac{V_3}{V_2} = \frac{V_2}{V_1}$.

Поскольку температуры в точках 3 и 2 равны – из уравнения Клапейрона получаем: $P_3 = P_1 V_2 / V_3$.

Работа на участке 2-3 равна: $A_{23} = \frac{P_1 + P_3}{2} \cdot (V_3 - V_2)$

Количество тепла, подведенного на участке 1-2: $Q_{12} = \frac{5}{2} P_1 (V_2 - V_1)$

Используя соотношение, данное и подставляя выражение для P_3 и коэффициент альфа, получаем уравнение: $2\alpha^2 - 5\alpha + 3 = 0$.

Решая – получаем **ответ:** $\alpha = 3/2$.